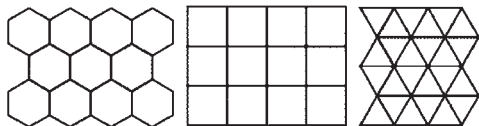




کاشی‌کاری‌های اشرف هندسی و تبدیلات

آن‌ها باقی نماند. ثابت می‌شود که با تمام انواع مثلث‌ها و چهارضلعی‌ها و برخی از پنج‌ضلعی‌ها و شش‌ضلعی‌ها می‌توان صفحه را فرش کرد (یعنی کاشی‌کاری ساخت). در شکل ۱ کاشی‌کاری‌ها با مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع و شش‌ضلعی منتظم نشان داده شده‌اند.



شکل ۱

پیش از خواندن ادامه مقاله بکوشید ثابت کنید که چرا با مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع و شش‌ضلعی منتظم می‌توان صفحه را فرش کرد (خوانندگان علاقه‌مند برای دیدن جزئیات بیشتر می‌توانند ر.ک: قاری، کاشی‌کاری با چندضلعی...، ۱۳۹۱: ۸۷-۸۲، قاری کاشی‌کاری ارشمیدسی، ۱۳۹۱: ۲۴-۱۵).

یک تبدیل «ایزومتري»^۲ (با به‌طور خلاصه ایزومتري) نگاشتی است که از صفحه اقلیدسی به روی خودش، به‌طوری که حافظ طول باشد. به عبارت دیگر، همواره فاصله بین دو نقطه و تصاویرشان تحت تبدیل ایزومتري مساوی هستند. برای مثال، «انتقال» یک ایزومتري است. در حالی که «تجانس» ایزومتري نیست. ریاضی‌دانان از سال ۱۸۳۱ می‌دانستند که هر ایزومتري یکی از این چهار نوع است: دوران، انتقال، انعکاس، و لغزه (که ترکیبی است از یک انعکاس و یک انتقال موازی با خط انعکاس).

چکیده

در این مقاله، به بررسی کاشی‌کاری‌های نقاش هلندی، ام. سی. اشرف و ارتباط آن‌ها با هندسه کاشی‌کاری پرداخته‌ایم. روش‌هایی را معرفی کرده‌ایم که به وسیله آن‌ها می‌توان با استفاده از تبدیلات ایزومتري یک کاشی‌کاری مفروض را به کاشی‌کاری‌هایی شبیه به نقاشی‌های اشرف تبدیل کرد. این روش‌ها عبارت‌اند از: روش انتقال، روش دوران، ترکیب روش انتقال و دوران، و روش شکاف.



دکتر مقداد قاری^۳

کلیدواژه‌ها: کاشی‌کاری، کاشی‌کاری‌های اشرف، تبدیلات ایزومتري، انتقال، دوران.

مقدمه

کاشی‌کاری که یکی از موضوعات هندسه محسوب می‌شود، بسیار ساده و برای همه قابل فهم است و وسیله‌ای جذاب برای یادگیری بسیاری از مفاهیم ریاضی است (ر.ک: رستگار، ۱۳۸۱ Gunbaum & Shephard, 1987). پیش از ورود به اصل مطلب، مفاهیم کاشی‌کاری و ایزومتري را یادآوری می‌کنیم. «کاشی‌کاری»^۱ صفحه، یعنی پوشاندن کامل صفحه (اقلیدسی) با شکل‌های هندسی به‌طوری که شکل‌ها روی هم قرار نگیرند و هیچ فضای خالی بین

کاشی کاری که
یکی از موضوعات
هندسه محسوب
می شود، بسیار
ساده و برای همه
قابل فهم است و
وسیله ای جذاب
برای یادگیری
بسیاری از مفاهیم
ریاضی است

او الگوهای هندسی سیاه و سفید پولیا را به عنوان راهنمایی برای ساختن طرح های خود به کار برد و به این فکر افتاد که با استفاده از تصاویر موجودات زنده (مانند پرندگان، ماهی ها و خزندگان)، کاشی کاری هایی بسازد. نمونه هایی از کاشی کاری های کاخ الحمراء را در شکل ۳ می بینید. نمونه های زیادی از این کاشی کاری ها را می توان در مساجد اسلامی یافت.



شکل ۳

■ سؤال ۲. دلیل اینکه معماران در مساجد اسلامی از شکل های هندسی به جای تصاویر موجودات زنده برای ساخت کاشی کاری استفاده کرده اند، چیست؟
● پاسخ: به طور قطع یکی از اهداف آن ها، جلوگیری از برهم خوردن حواس (که ممکن است با دیدن تصاویر موجودات زنده به وجود آید) و در عین حال، ایجاد آرامش و تمرکز برای عبادت کنندگان بوده است. این نقش های هندسی، علاوه بر اینکه دارای نمادها و معانی خاصی هستند (برای مثال ر.ک: کریچلو، ۱۳۹۰)، به دلیل تکرار یک الگوی مبنا به صورتی منظم و قاعده مند، در ذهن بیننده القا کننده نظم و یادآور وحدت در کثرت (آفرینش) و کثرت در وحدت (معراج انسان) هستند (برای اطلاعات بیشتر ر.ک: پارمان و السعید، ۱۳۷۷).

حال که با علت عدم استفاده از کاشی کاری های به سبک اشتر در مساجد آشنا شدیم، می خواهیم طریقه رسم این کاشی کاری ها را یاد بگیریم.

■ سؤال ۳. آیا می توان با شکل ۴ صفحه را فرش کرد؟



شکل ۴. اسب بالدار

از آنجا که مطالب این مقاله به صورت پرسش و پاسخ مطرح شده اند، به خواننده علاقه مند پیشنهاد می شود که پس از خواندن یک سؤال ابتدا خود پاسخ را بیابد و سپس ادامه مطلب را دنبال کند.

کاشی کاری های اشتر

در این بخش نشان می دهیم که چگونه می توان با به کارگیری تبدیلات ایزومتري (به خصوص انتقال و دوران) یک کاشی کاری مفروض را به کاشی کاری از نوع اشتر تبدیل کرد. ام. سی. اشتر^۳ (۱۹۷۲-۱۸۹۸) نقاش هلندی، به ریاضی علاقه داشت و بسیاری از نقاشی هایش کاشی کاری هایی هستند که در آن ها به جای استفاده از شکل های هندسی، از تصاویر موجودات زنده بهره گرفته است (ر.ک: اشتر، ۱۳۸۵؛ مک گیلاوی، ۱۳۷۱؛ www.mcescher.com; Ranueei, 1974).

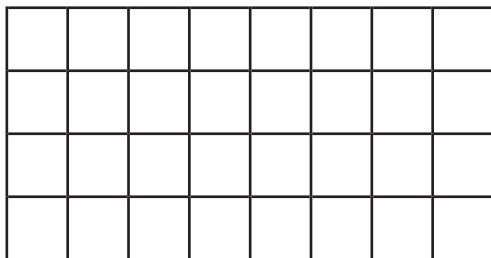
■ سؤال ۱. آیا می توان با تصاویر موجودات زنده صفحه را فرش کرد؟

● پاسخ: بله، به راحتی می توان چنین کاشی کاری هایی رسم کرد. شکل ۲ نمونه ای از نقاشی های اشتر است.



شکل ۲

اشتر در میان سفرهای متعدد خود در سال ۱۹۲۲ مسافرتی به اسپانیا داشت. ضمن این سفر از روی کاشی کاری های به جا مانده از مورها (مسلمانان شمال آفریقا) در اسپانیا در کاخ «الحمراء»^۴ و به خصوص از روی مسجد «لامز کیتا»^۵ واقع در شهر کوردوبا، نسخه برداری های مبسوطی به عمل آورد. در سال ۱۹۲۴، جورج پولیا مقاله ای در یک مجله بلورشناسی منتشر کرد که در آن گروه های تقارن صفحه را رده بندی و طرح هایی از این ۱۷ نوع گروه تقارن را در آن چاپ کرده بود. ب. ج. اشتر که زمین شناس بود، یک نسخه از آن مقاله را برای برادر هنرمندش، ام. سی. اشتر فرستاد.



شکل ۶. قسمتی از کاشی کاری با مربع

همچنین، الگوی قرار گرفتن اسب‌ها در کاشی کاری شکل ۵ که به‌طور موازی در ردیف‌ها و ستون‌هایی قرار گرفته‌اند نیز مشابه با کاشی کاری با مربع است. پس تا این لحظه حدس زدیم که اسب بالدار از روی مربع ترسیم شده است، ولی باید این حدس را اثبات کنیم.

■ **سؤال ۵.** چگونه می‌توان مربع را به اسب بالدار تبدیل کرد؟

● **پاسخ:** اولین راه‌حلی که به ذهن می‌رسد این است که اطراف اسب مربعی ترسیم کنیم. البته این راه اشتباه است، زیرا با کنار هم قرار دادن این مربع‌ها فضای خالی بین اسب‌ها باقی خواهد ماند. در واقع ضلع‌های مستقیم مربع باید طوری تغییر شکل یابند که شبیه پازل، یکدیگر را تکمیل کنند. در شکل ۷ نشان داده‌ایم که چگونه یک مربع می‌تواند به یک اسب بالدار تبدیل شود.



شکل ۷. مراحل تبدیل مربع به اسب بالدار (از چپ به راست) با استفاده از انتقال

در این تبدیل از انتقال استفاده شده است. روی یکی از ضلع‌های مربع یک منحنی دلخواه رسم می‌کنیم و آن را به روی ضلع مقابل آن انتقال می‌دهیم (و یا منحنی دلخواه را از روی یک ضلع مربع بریده و روی ضلع مقابل آن می‌چسبانیم). سپس همین کار را در مورد دو ضلع دیگر انجام می‌دهیم. حال اگر در کاشی کاری منتظم که از کاشی‌های مربع‌شکل تشکیل شده است (شکل ۶)، هر مربع را مطابق با شکل ۷ به یک اسب بالدار تبدیل

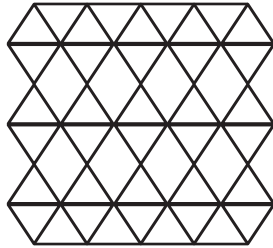
● **پاسخ:** در نگاه اول ممکن است فکر کنید که نمی‌توان با اسب بالدار شکل ۴ صفحه را فرش کرد. برای اینکه به‌طور عملی این واقعیت را امتحان کنید، می‌توانید کاغذهای شفاف یا نازک فراهم کنید و با قرار دادن کاغذ شفاف روی تصویر اسب بالدار و رسم مکرر آن، مطمئن شوید که با اسب بالدار می‌توان صفحه را فرش کرد. کاشی کاری حاصل به‌صورت شکل ۵ است:



شکل ۵. کاشی کاری رسم شده توسط اسب با کاشی‌های اسب بالدار

■ **سؤال ۴.** اسب بالدار شکل ۴ چگونه رسم شده است که با آن می‌توان صفحه را فرش کرد؟

● **پاسخ:** دقت کنید که با تصویر هر اسبی نمی‌توان صفحه را فرش کرد. همچنین، برای ترسیم این اسب نباید مانند نقاشان قسمت‌های متفاوت اندام‌های اسب مانند سر، بدن، پاها و دست‌های آن را با شکل‌های هندسی رسم کرد. با کمی دقت می‌توانید تصویر این اسب و کاشی کاری آن را با کاشی کاری‌هایی که می‌شناسید، مقایسه کنید و دریابید که مشابه با کدام کاشی کاری است. نکته‌ای که می‌تواند به رسیدن به پاسخ این سؤال کمک کند، این است که در کاشی کاری شکل ۵ می‌توان نقاطی را پیدا کرد که دقیقاً چهار اسب بالدار اطراف آن نقاط قرار گرفته‌اند. این وضعیت مشابه با کاشی کاری با مربع است (شکل ۶).

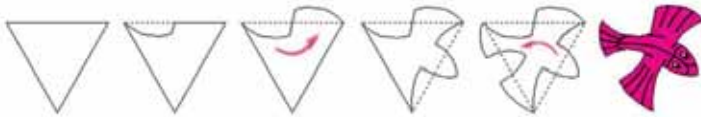


شکل ۱۰. قسمتی از کاشی کاری با مثلث متساوی الاضلاع

پس **حدس** می‌زنیم که اسب بالدار از روی مثلث متساوی الاضلاع ترسیم شده است، ولی باید آن را اثبات کرد.

■ **سؤال ۹.** چگونه می‌توان مثلث متساوی الاضلاع را به ماهی تبدیل کرد؟

● **پاسخ:** مسلماً روش انتقال را نمی‌توان برای مثلث به کار برد و باید روش دیگری برای تبدیل مثلث متساوی الاضلاع به ماهی یافت. در شکل ۱۱ نشان داده شده است که چگونه می‌توان با استفاده از دوران، یک مثلث را به یک ماهی تبدیل کرد (مرجع [۱۰] را ببینید). (ر.ک: Meletsky, 1974).



شکل ۱۱. مراحل تبدیل مثلث به ماهی با استفاده از دوران

مطابق با شکل ۱۱، ابتدا یکی از ضلع‌ها را نصف و روی نصف آن یک منحنی دلخواه رسم می‌کنیم. سپس این منحنی را 180° درجه حول نقطه وسط آن ضلع دوران می‌دهیم. همان‌طور که در کاشی کاری شکل ۹ می‌بینید، با این کار این ضلع خودش را تکمیل خواهد کرد. در مرحله بعد، روی یکی از اضلاع دیگر مثلث یک منحنی دلخواه رسم می‌کنیم و آن را حول رأس دیگر مثلث 60° درجه دوران می‌دهیم. این روش را «روش دوران» می‌نامند.

روش دیگر برای فرش کردن صفحه استفاده از مهرهایی به شکل کاشی‌های کاشی کاری است. مهرهای شکل ۱۲ از روی کاشی‌های شکل‌های ۴ و ۸ ساخته شده‌اند.

کنیم، کاشی کاری شکل ۵ به دست می‌آید. این روش را روش «انتقال» یا «برش» می‌نامند.

■ **سؤال ۶.** روش انتقال را برای چه شکل‌هایی می‌توان به کار برد؟

● **پاسخ:** روش انتقال برای شکل‌هایی قابل کاربرد است که اضلاع روبه‌روی آن‌ها دوه‌دو موازی و مساوی باشند.

در ادامه روش دیگری برای ترسیم کاشی کاری‌هایی به سبک اشر معرفی می‌شود.

■ **سؤال ۷.** آیا می‌توان با شکل ۸ صفحه را فرش کرد؟



شکل ۸. ماهی

● **پاسخ:** به سادگی دیده می‌شود که با ماهی شکل ۸ کاشی کاری شکل ۹ را می‌توان ساخت.



شکل ۹. کاشی کاری اشر با کاشی‌های شکل ۸

■ **سؤال ۸:** ماهی شکل ۷ چگونه رسم شده است که با آن می‌توان صفحه را فرش کرد؟

● **پاسخ:** با کمی دقت می‌توان دریافت که نقاطی در کاشی کاری شکل ۹ وجود دارند که شش ماهی اطراف هر نقطه از آن نقاط را پوشانده‌اند. این وضعیت مشابه با کاشی کاری با مثلث متساوی الاضلاع است (شکل ۱۰).

سؤال ۱۱: استفاده از روش دوران به جای انتقال برای مربع باعث ایجاد چه تفاوت‌هایی می‌شود؟ کاشی‌کاری‌های شکل‌های ۵ و ۱۵ چه تفاوت‌هایی دارند؟

● **پاسخ:** تفاوت در طریقه قرار گرفتن کاشی‌ها در کاشی‌کاری است. در کاشی‌کاری شکل ۵، به دلیل استفاده از روش انتقال اسب‌های بالدار (شکل ۷) به صورت انتقال یافته در کاشی‌کاری ظاهر شده‌اند. ولی در کاشی‌کاری شکل ۱۵، به دلیل استفاده از روش دوران مارمولک‌ها (شکل ۱۴) به صورت دوران یافته در کاشی‌کاری ظاهر شده‌اند.

شکل‌های ۷، ۱۱ و ۱۴ به صورت انیمیشن در این منبع موجودند:

<http://britton.disted.camosun.bc.ca>

در بخش دوم مقاله روش‌های دیگری برای ترسیم کاشی‌کاری به سبک اشتر معرفی می‌شوند.

* پژوهشگر پژوهشگاه دانش‌های بنیادی
meghdadghari@gmail.com

* پی‌نوشت‌ها.....

1. Tiling
2. Isometry
3. Maurits Cornelis Escher
4. Alhambra
5. La Mezquita

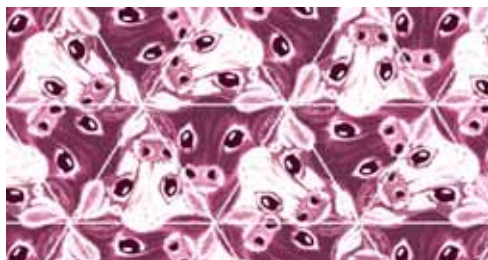
* **منابع:**.....

۱. اشتر، موریتس کورنلیس (۱۳۸۵). سرگذشت و آثار اشتر. ترجمه علی اصغر بهرام بیگی. کارگاه هنر، تهران.
۲. پارمان، عایشه و السعید، عصام (۱۳۷۷). نقش‌های هندسی در هنر اسلامی. ترجمه مسعود رجب‌نیا. انتشارات سروش، تهران.
۳. رستگار، آرش (۱۳۸۱). کارگاه هندسه. مؤسسه فرهنگی فاطمی، تهران. چاپ دوم.
۴. مک‌گیلوی، ک. اچ. (۱۳۷۱). دنیای علمی و جادویی موریتس اشتر. ترجمه محمدرضا کشاورزی. انتشارات بهار، تهران.
۵. قاری، مقداد (۱۳۹۱). «کاشی‌کاری با چندضلعی‌های منظم». نشریه آموزشی پژوهشی اتحادیه نمایندگان انجمن‌های علمی و آموزشی معلمان ریاضی ایران. شماره‌های ۸ و ۹.
۶. قاری، مقداد (۱۳۹۱). کاشی‌کاری‌های ارشمیدسی. فنود، نشریه انجمن علمی آموزشی معلمان ریاضی استان اصفهان. شماره ۱۹.
۷. کریچلو، کیت (۱۳۹۰). تحلیل مضامین جهان‌شناختی نقوش اسلامی. ترجمه سیدحسین آذرکار. مؤسسه انتشارات حکمت، تهران.
8. Grunbaum, B. & Shephard, G. C. (1987). *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman and company.
9. Hejazi, Mehrdad (2005). *Geometry in nature and Persian architecture*. Building and Environment, vol. 40, pages 1413-1427.
10. Maletsky, Evan M. (1974). *Designs with Tessellations*, Mathematics Teacher, vol. 67, No. 4, pages 335-338.
11. Ranucci, Ernest R. (1974). Master of Tessellations: M. C. Escher, 1898-1972, Mathematics Teacher, vol. 67, No. 4, pages 299-306.
12. <http://www.meescher.com/>, M. C. Escher, the official website.
13. <http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbescher.htm>, Escher in the Classroom.



شکل ۱۲

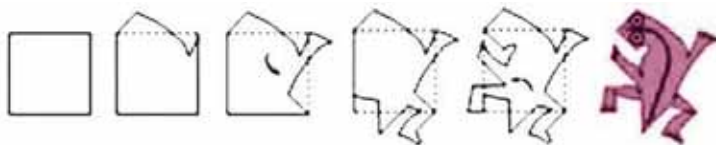
کاشی‌کاری شکل ۱۳ نیز با استفاده از روش دوران از مثلث متساوی‌الاضلاع به دست آمده است:



شکل ۱۳

سؤال ۱۰: روش دوران را برای چه شکل‌هایی می‌توان به کار برد؟

● **پاسخ:** روش دوران برای شکل‌هایی قابل کاربرد است که اضلاع مجاور آن‌ها مساوی باشند. دقت کنید که این روش برای مربع نیز قابل کاربرد است. در شکل ۱۴ روش دوران را برای مربع نشان داده‌ایم.



شکل ۱۴. مراحل تبدیل مربع به مارمولک با استفاده از دوران

با کاشی‌کاری شکل ۱۴ کاشی‌کاری شکل ۱۵ را می‌توان ساخت.



شکل ۱۵. کاشی‌کاری اشتر با کاشی شکل ۱۴